

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

N°4

$$\begin{cases} 2 \log_5 X = 1 - y \\ X^y = 0,2 \quad (*) \end{cases}$$

Заметим, что $X \neq 1$, тк если $X=1$, то $1^y=1$, что противоречит ур-нию (*)

$$\begin{cases} 2 \log_5 X = 1 - y \\ y = \log_X 0,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_5 X = 1 - \log_X 0,2 \quad (1) \\ y = \log_X 0,2 \end{cases}$$

(1): $2 \log_5 X = 1 + \log_X 5$

$$2 \log_5 X = 1 + \frac{1}{\log_5 X}$$

$$2 \log_5 X - \frac{1}{\log_5 X} - 1 = 0 \quad | \cdot \log_5 X \neq 0, \text{ тк } X \neq 1$$

$$2 \log_5^2 X - 1 - \log_5 X = 0$$

$$\log_5^2 X - \frac{1}{2} \log_5 X - \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \log_5 X = 1 \\ \log_5 X = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 5 \\ X = \frac{1}{25} \end{cases}$$

При $X=5$, $y = \log_5 0,2 = -1$

При $X=\frac{1}{25}$, $y = \log_{\frac{1}{25}} 0,2 = \log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{5} = 2$

Ответ: $(5; -1); (\frac{1}{25}; 2)$

ОДЗ: $X > 0$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Олимпиада школьников «Учить строить будущее» по дисциплине математика

ЧИСТОВИК

Вариант № 2

(без № варианта работа не проверяется и аннулируется)

При обнаружении в чистовике записей, не относящихся к решаемому варианту, работа не проверяется и аннулируется

БЛАНК ОТВЕТОВ № 1

(в столбце «Ответ» необходимо написать итоговый ответ на задачу)

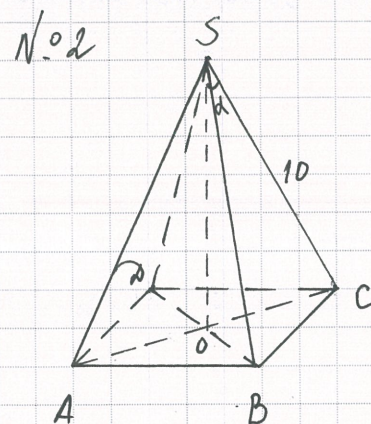
Задача №	Ответ	Служебное поле
1		
2	$\frac{2000 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{9}$	
3		
4	$(5; -1); (\frac{1}{25}; 2)$	
5	Катя живет в Москве, работает психологом	
6		
7	$\frac{120}{17}$	
8	$(2; \frac{5}{2}] \cup (3; 4]$	
9	± 1	
10		
Итого:		

Изменение неправильного ответа

(для отмены неправильного ответа укажите номер задачи и впишите правильный ответ)

Задача №	Ответ	Служебное поле

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.



Дано: $SABCD$ - правильная
четырёхгр. пирамида
 SO - высота пирамиды
 $SC = 10$

$$\angle(SO, SC) = \alpha$$

Найти: $V_{\text{пирам.}}$

Решение:

Тк пирамида правильная, то $ABCD$ - квадрат.
Основание высоты, т. е. O , является точкой
пересечения диагоналей квадрата.

Тк SO - высота пирамиды, $\therefore SO \perp ABC$, тогда $SO \perp OC$.

В прямоугол. $\triangle SOC$:

$$\sin \angle OSC = \frac{OC}{SC}, \therefore OC = SC \cdot \sin \angle OSC = 10 \cdot \sin \alpha;$$

$$AC = 2OC = 20 \cdot \sin \alpha;$$

$$\cos \angle OSC = \frac{SO}{SC}; \therefore SO = SC \cdot \cos \angle OSC = SC \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Тк } ABCD - \text{квадрат, то } AB\sqrt{2} = AC, \therefore AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{20 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = (10\sqrt{2} \sin \alpha)^2 = 200 \sin^2 \alpha$$

$$V_{\text{пирам.}} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 200 \sin^2 \alpha \cdot 10 \cos \alpha = \frac{2000 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{2000 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

№8

$$\log_{x-2} (2x^2) \leq \log_{x-2} (13x-20)$$

$$\log_{x-2} (2x^2) - \log_{x-2} (13x-20) \leq 0$$

Решим и-во методом рационализации:

Тк $y = \log_a x$ - монотонна, то

$$\log_a x - \log_a y \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(x-y) \leq 0, \text{ при } a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$$

Таким образом, получаем и-во

$$(x-2-1)(2x^2-13x+20) \leq 0$$

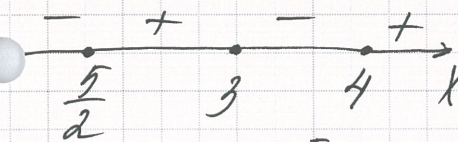
$$2(x-3)(x-\frac{5}{2})(x-4) \leq 0 \quad | :2$$

$$(x-3)(x-\frac{5}{2})(x-4) \leq 0$$

Решим и-во методом интервалов:

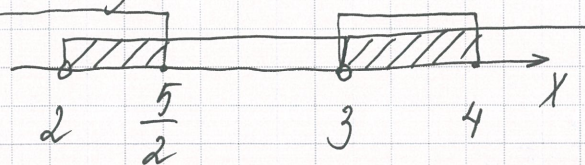
$$y = (x-3)(x-\frac{5}{2})(x-4)$$

$$D(y): \mathbb{R}; \text{ корни } p\text{-числ: } 3; \frac{5}{2}; 4$$



$$x \in (-\infty; \frac{5}{2}] \cup [3; 4]$$

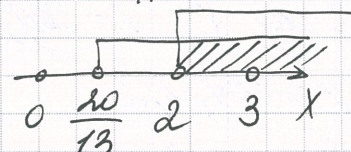
с учетом ОДЗ



$$\text{Ответ: } (2; \frac{5}{2}] \cup [3; 4]$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 > 0 \\ 13x-20 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > \frac{20}{13} \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$



$$x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

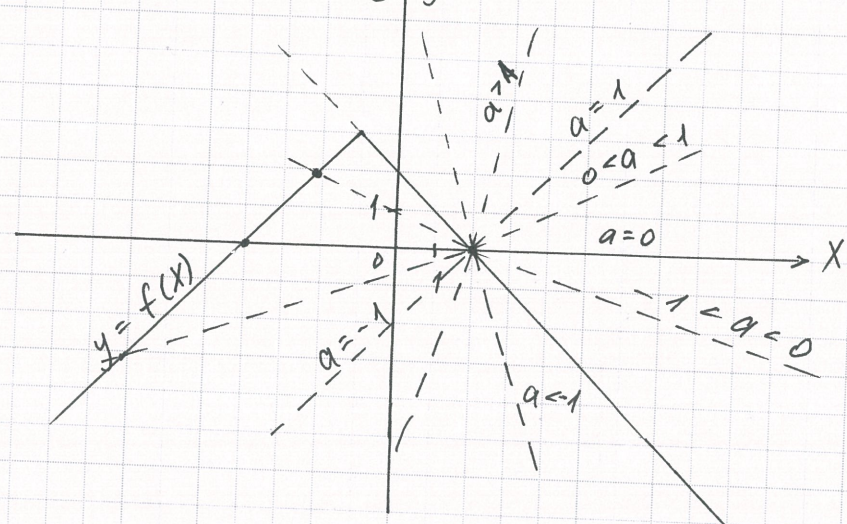
№ 9

$$|x+1| + a|x-2| = 3 \quad (1)$$

$$a|x-2| = 3 - |x+1|$$

Рассмотрим на плоскости множество точек, удовлетворяющих данному уравнению:

Рассмотрим функцию $f(x) = 3 - |x+1|$ на координатной плоскости: она задает график модуля, с вершиной в точке $(-1; 3)$ и ветвями вниз.



$a|x-2|$ — семейство графиков модуля, где вершинами являются все точки $(2; 0)$.

$g(x) = a|x-2|$ — семейство пар лучей, исходящих из точки $(2; 0)$, где в каждой паре лучи симметричны относительно прямой $x=2$.

При $a=1$ график функции $f(x)$ частично совпадает с графиком $g(x)$, тогда уравнение (1) имеет решения $x \in [-1; 2]$.

При $a=0$ график функции $f(x)$ не пересекается с графиком $g(x)$, $\therefore$ уравнение (1) не имеет решений.

При $a \in (0; 1)$ график функции $f(x)$ пересекается с графиком $g(x)$ в двух точках, $\therefore$ уравнение (1) имеет 2 решения.

При $a < 0$ график функции $g(x)$ имеет вид прямой $y=0$ и пересекает график $f(x)$ в 2 точках, $\therefore$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

уравнение (1) имеет 2 решения.

При $a \in (-1; 0)$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в двух точках, $\therefore$ уравнение (1) имеет 2 решения.

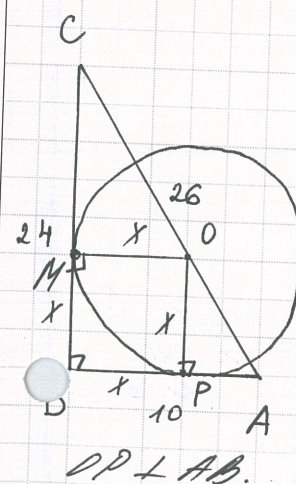
При $a = -1$ график функции $f(x)$ частично совпадает с графиком $g(x)$, $\therefore$ уравнение (1) имеет решения $x \in [2; +\infty)$.

При $a < -1$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ не пересекаются, $\therefore$ уравнение (1) не имеет решений.

Таким образом, при $a = \pm 1$ уравнение имеет больше 2-х корней.

Ответ: ± 1

№ 7



Решение:

Заметим, что $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $\therefore$ по т. Пифагора $\triangle ABC$ — прямоугольный, AC — гипотенуза.

Проведем радиус OM , где M — точка касания окр. с прямой AC . По св-ву касательной $OM \perp AC$.

Проведем радиус OP , где P — точка касания окр. с прямой AB . По св-ву касательной $OP \perp AB$.

Тк. $OM \perp AC$ и $AB \perp AC$, то $OM \parallel AB$; тк. $AB \perp AC$ и $OP \perp AB$, то $OP \parallel AC$, $\therefore$ $OMPB$ — параллелограмм, тк. $\angle B = 90^\circ$, то $OMPB$ — прямоугольник; $OM = OP$, тк. они радиусы окружности. Пусть $OP = x = OM$. В прямоугольнике $OMPB$ смежные стороны OM и OP равны, $\therefore$ $OMPB$ — квадрат со сторонами x .

$$CM = AC - AM = 24 - x$$

$$AP = AB - BP = 10 - x$$

$\triangle CBA \sim \triangle CMO$ по двум углам ($\angle CMO = \angle CBA = 90^\circ$, $\angle C$ — общий), тогда

$$\frac{AB}{MO} = \frac{BC}{CM}, \quad \frac{10}{x} = \frac{24}{24-x}; \quad 24x = 240 - 10x; \quad 34x = 240;$$

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 6

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

№7 (предположение)

$$x = \frac{240}{34}$$

$$x = \frac{120}{17}$$

Ответ: $\frac{120}{17}$

№5

Луиза	Катри	Наташа	Согги
X	X	X X X	Владивосток
X X X	X	X X	Москва
П Б К	П Б К	П Б К	

П - пенни
Б - билет
К - кино

Если Наташа живет Согги и спитается в кино, тогда Луиза живет во Владивостоке и занимается билетами, а Катри живет в Москве и занимается пенни.

Ответ: Катри живет в Москве и занимается пенни.

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.